Concours des 21, 22 et 23 mai 1990 d'admission en 1-ère année à L'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
MATHÉMATIQUES
(Options M.P)
* * *

Correction

I-Étude de la suite $(I_n(f)_{n\in\mathbb{N}}$

1. f étant continue sur $[0,1]$, donc elle est bornée : il existe $M>0$ tel que $\forall t\in[0,1]$, $|f(t)|\leq M$. D'où :

$$|I_n(f)|\leq\int_0^1 t^n|f(t)|\mathrm{d}t\leq M\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{M}{n+1}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f)=0$.

2. (a) Soit $\alpha\in]0,1[$, on a :

$$\left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t\right|\leq nM\int_0^\alpha t^n\mathrm{d}t\leq nM\alpha^{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha^{n+1}=0$, car c'est le terme général d'une série convergente. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t=0$.

(b) Soit $\varepsilon>0$. Par continuité de f en 1, il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que

$$t\in[\alpha,1]\Rightarrow|f(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

et donc

$$\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{n\varepsilon}{2}\int_\alpha^1 t^n\mathrm{d}t\leq\frac{n\varepsilon}{2}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{n\varepsilon}{2(n+1)}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part,

$$n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t=n\int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t+n\int_\alpha^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, i existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$n\geq n_0\Rightarrow\left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n\geq n_0$, $|nI_n(f)|=\left|n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\varepsilon$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n(f)=0$.

(c) Soit $\varepsilon>0$. Par continuité de f en 1, il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que

$$t\in[\alpha,1]\Rightarrow|f(t)-f(1)|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$\left|(n+1)\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t-f(1)\right|=\left|(n+1)\int_0^1 t^n\left[f(t)-f(1)\right]\mathrm{d}t\right|\leq\left|(n+1)\int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t\right|+\left|(n+1)\int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t\right|,$$

où $g(t)=f(t)-f(1)$.

Comme dans la question précédente, on montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t-f(1)=0$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t=0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t=f(1)$.

3. (a) Par une intégration par parties, on obtient :

$$I_n(f) = nI_{n-1}(f) - \frac{1}{e}$$

D'où

$$I_n(f) = n!I_0(f) - \frac{1}{e}(1 + n + n(n-1) + ... + n!).$$

avec $I_0(f) = \int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}$. D'où :

$$I_n(f) = n!\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}(1 + n + n(n-1) + ... + n!).$$

(b) la somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ représente la reste de la série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$, de somme e. On a donc

$$R_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}.$$

D'où :

$$nn!R_n = enI_n(f)$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} nn!R_n = e \lim_{n\to\infty} nI_n(f) = ef(1) = ee^{-1} = 1$, et donc

$$R_n \sim \frac{1}{nn!}.$$

II-Étude de la série de terme général $\left[I_n(f)^2\right]$

1. On a $\lim_{n\to\infty} [nI_n(f)]^2 = f(1)^2$ ce qui entraine $\left[I_n(f)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)^2}{n^2}$. D'où, par comparaison à une série de Riemann, la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n(f)^2$.

2. Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{d} a_k e^{i(k+1)\theta}$. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
-i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^\pi \\
&= -i\sum_{k=0}^{d} a_k\left[\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_k\left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \\
&= \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x + i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

3. Il est clair que $\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1}[P(x)]^2\,\mathrm{d}x$ puisque $[0,1]\subset[-1,1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}[P(x)]^2\,\mathrm{d}x &= -i\int_0^\pi \left[[P(e^{i\theta}])^2 e^{i\theta}\right] \\
&= -i\int_0^\pi \left[P(e^{i\theta})P(e^{i\theta})e^{i\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \left|\int_0^\pi \left[P(e^{i\theta})P(e^{i\theta})e^{i\theta}\right]\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_0^\pi P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

L'application $\theta \mapsto P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\int_0^\pi P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$. D'où les inégalités demandées :

$$\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{1}[P(x)]^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

4. Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une famille de nombres réels et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a $P(x)^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l x^{k+l}$ et donc $\int_0^1 P(x)^2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{a_k a_l}{k+l+1}$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k a_l \delta_{k,l} 2\pi \\
&= \pi\sum_{k=0}^{n} a_k^2
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. L'inégalité $0 \leq \int_0^1 [P(x)]^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$ s'écrit donc :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \frac{a_k a_l}{k+l+1} \leq \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

5. L'application $(u, v) \mapsto \int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$ définie un produit scalaire sur C. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions f et g s'écrit :

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} I_k(f)t^k f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2\right|^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\int_0^1 g^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} I_k(f)\right]^2 \leq \pi \sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2.$$

D'où

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} I_k(f)^2 \leq \pi \int_0^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t.$$

Par passage à la limite, quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_k(f)^2 \leq \pi \int_0^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t$$

III- Étude de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$

1. Il s'agit d'une série alternée, et comme la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n(f)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k f(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{+1}f(t)}{1+t}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} + R_n$$

où

$$R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t}$ étant continues sur $[0, 1]$, donc elle bornée. D'où :

$$|R_n| \leq M \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{M}{n+1}$$

avec $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{|f(t)|}{1+t}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. Ce qui montre que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

3. Si $f(t) = 1$, on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).$$

4. Si $f(t) = \sqrt{t}$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t}$$

avec $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+3}$ et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\mathrm{d}t}{1+t} &= 2\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left(1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\\ &= 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+3} = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

IV-Etude de la série de terme général $I_n(f)$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$|t^n g(t)| \le |g(t)|$$

donc la fonction $t \mapsto t^n g(t)$ est absolument intégrable sur $[0,1[$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n(g) = \lim_{x\to 1}\int_0^x t^n g(t)\mathrm{d}t,$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Donc, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\left|\int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et α comme dans la question précédente, on a :

$$I_n(g) = \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t \le \int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

g étant continue sur $[0,\alpha]$, donc elle est bornée sur cet intervalle, d'où :

$$\left|\int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \le \sup_{t\in[0,\alpha]}|g(t)|\int_0^\alpha t^n\mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,\alpha]}|g(t)|\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t = 0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\displaystyle\int_0^\alpha t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \ge n_0$, on a :

$$|I_n(g)| \le \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(g) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t} + R_n$$

où

$$R_n = -\int_0^1 \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}.$$

Posons $g(t) = \dfrac{f(t)}{1-t}$, on a g est absolument intégrable sur $[0, 1[$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = -\lim\limits_{n\to\infty} I_{n+1}(g) = 0$, ce qui montre que la série de terme général $I_n(f)$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t.$$

3. Supposons que la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(f)$ est convergente, donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} I_n(f) \leq M.$$

Posons $g_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k f(t)$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq M.$$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ sur $[0, x]$ (x fixé). En effet, pur tout $t \in [0, x]$, on a :

$$\left| g_n(t) - \frac{f(t)}{1-t} \right| = \left| \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} \right| \leq \sup_{t\in[0,x]} \left| \frac{f(t)}{1-t} \right| \int_0^x t^{n+1}\mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,x]} \left| \frac{f(t)}{1-t} \right| \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Le dernier terme tend vers 0 indépendamment de t, donc on peut intervertir les deux symboles limite et intégral :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \lim_{n\to\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t}.$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \leq M.$$

Donc

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t \leq M$$

Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ est croissante et majorée sur $[0, 1[$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ existe, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

converge. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1}\int_0^x \lim_{n\to\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty}\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Posons $u_k(x) = \displaystyle\int_0^x t^k f(t)\mathrm{d}t$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \ 0 \leq u_k(x) \leq u_k(1)$$

et la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(1)$ converge. Donc la série $\displaystyle\sum_{k\in N} u_k$ converge uniformément sur $[0,1]$, donc, comme les u_k sont continues sur $[0,1]$, alors $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=}^{\infty} u_n(x)$ est continue, en particulier, on a :

$$\lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to 1} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(f).$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1-t}.$$

V - Restriction de l'étude à $\mathscr{P}_N$ (voir introduction)

1. Il est clair que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est symétrique, bilinéaire et positive, montrons qu'elle est définie. Soit $P \in \mathscr{P}_N$ tel que $(P|P) = 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 0$, comme l'application $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0,1]$ alors $\forall t \in [0,1]$, $P(t)^2 = 0$, donc le polynôme P admet une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. $\forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}_N$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_k(P_1+\lambda P_2) = \int_0^1 t^k(P_1(t)+\lambda P_2(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k P_1(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^1 t^k P_2(t)\mathrm{d}t = I_k(P_1)+\lambda I_k(P_2).$$

   Donc I_k est une application linéaire de $\mathscr{P}_N$ dans $\mathbb{R}$, donc c'est une forme linéaire sur $\mathscr{P}_N$.
3. Puisque la famille $(I_k)_{0\leq k\leq N}$ est de cardinal $N+1$ et $\dim \mathscr{P}_N^* = N+1$, il suffit de montrer que la famille est libre. Soit donc $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$ des réels tels $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}\alpha_k I_k = 0$. En particulier, pour tout $l \in [\![0,N]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\alpha_k I_k(X^l) = 0$. Or $I_k(X^l) = \displaystyle\int_0^1 t^{k+l}\mathrm{d}t = \frac{1}{k+l+1}$, on a donc :

$$\forall l \in [\![0,N]\!],\ \ \sum_{k=0}^{N}\frac{\alpha_k}{k+l+1} = 0.$$

Donc le vecteur $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N)$ est solution du système $H_{N+1}X = 0$ où $H_N = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq N+1}$.
Montrons que H_N est inversible. Pour cela il suffit de montrer qu'elle est définie positive puisqu'elle est symétrique.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$.

$$^tXH_NX = \sum_{1\leq i,j\leq N+1} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j-2}\mathrm{d}t.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$^tXH_NX = \int_0^1 \sum_{1\leq i,j\leq N+1} x_ix_jt^{i+j-2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N+1} x_it^i\right)^2 \mathrm{d}t.$$

De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si $(H_NX|X) = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0, 1],\ \sum_{i=1}^{N+1} x_it^{i-1} = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_N est bien définie positive. En particulier H_N est inversible.
et comme H_{N+1} est inversible, alors $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_N = 0$, donc la famille $(I_k)_{0\leq k\leq N}$ est libre.

4. Notons $\mathscr{C} = (1, X, X^2, ..., X^N)$ la base canonique de $\mathscr{P}_N$ et $\mathscr{B}_0 = (l_0, l_1, ..., l_N)$ la base duale de $\mathscr{C}$. On a donc, pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, $l_i(X^j) = \delta_{i,j}$. Notons $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$. On a aussi :

$$\forall k \in [\![0, N]\!]^2,\ \ I_k = \sum_{i=0}^{d} p_{ki}l_i.$$

Donc, pour tout $j \in [\![0, N]\!]^2$,

$$I_k(X^j) = \sum_{i=0}^{N} p_{ki}l_i(X^j) = p_{kj}.$$

D'où $p_{kj} = \frac{1}{k+j+1}$, et donc $P = H_N$.

5. Il est clair que l'application h est linéaire de $\mathscr{P}_N$ dans $\mathscr{P}_N$. Soit maintenant $P \in \mathscr{P}_N$ tel que $h(P) = 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \sum_{k=0}^{N} I_k(P)t^k = 0,$$

donc tous les coefficients du polynôme $\sum_{k=0}^{N} I_k(P)X^k$ son nuls, c'est-à-dire $P \in \bigcap_{k=0}^{N} \ker(I_k) = \{0\}$, donc h est un injective et puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathscr{P}_N$, qui est de dimension finie, alors h est un isomorphisme de $\mathscr{P}_N$.

On a, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $h(X^l)(t) = \sum_{k=0}^{N} I_k(X^l)t^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+l+1}t^k$, donc h est représenté par H_N dans la base canonique.

6. Pour tout $P, Q \in \mathscr{P}_N$, on a :

$$\begin{aligned}(P|h(Q)) &= \int_0^1 P(t)\sum_{k=0}^{N} I_k(Q)t^k\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{N} I_k(Q)\left(\int_0^1 P(t)t^k\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{k=0}^{N} I_k(Q)I_k(P)\\ &= (h(P)|Q)\end{aligned}$$

Donc h est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{P}_N$, donc il est diagonalisable, il est de même de la matrice A. Soit λ une valeur propre de A, donc de h, alors il existe $P \in \mathscr{P}_N$ non nul tel que $h(P) = \lambda P$, d'où :

$$\lambda(P|P) = (P|h(P) = \sum_{k=0}^{N} I_k(P)^2 \geq 0.$$

Donc $\lambda \geq 0$ ($(P|P) = \|P\|^2 \neq 0$) et comme h est inversible, alors $\lambda > 0$.

•••••••• •